



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI  
NAȚIONALE

**Matematika tantárgyverseny**  
**Megyei szakasz, 2014. március 8.**

**XII. OSZTÁLY**

**1. feladat.** Az  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén legyen  $f_n : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \arctg([x])$ , ahol  $[x]$  az  $x$  valós szám egészrésze. Igazold, hogy  $f_n$  integrálható és számítsd ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n f_n(x) dx.$$

*Gazeta Matematică*

**2. feladat.** Adott az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan deriválható függvény és

$$s_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Igazold, hogy az  $(s_{n+1} - s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat konvergens és határértéke  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**3. feladat.** Legyen  $(A, +, \cdot)$  egy olyan gyűrű, amelyre  $x + x^2 + x^3 = x^4 + x^5 + x^6$  bármely  $x \in A$  esetén.

a) Igazold, hogy ha  $n \geq 2$  természetes szám,  $x \in A$  és  $x^n = 0$ , akkor  $x = 0$ .

b) Igazold, hogy  $x^4 = x$ , bármely  $x \in A$  esetén!

**4. feladat.** Legyen  $(G, \cdot)$  egy olyan csoport, amelyben nincsenek olyan elemek, amelyek rendje 4 és  $f : G \rightarrow G$  egy olyan csoportmorfizmus, amelyre  $f(x) \in \{x, x^{-1}\}$ , bármely  $x \in G$  esetén. Igazold, hogy  $f(x) = x$  bármely  $x \in G$  esetén vagy  $f(x) = x^{-1}$  bármely  $x \in G$  esetén!

*Munkaidő 4 óra.*

*Minden feladatra 7 pont szerezhető.*